Drugi del (50%). Rešite naloge. **Odgovore dobro utemeljite!**

1. naloga **(30 točk)**

a) **(15 točk)** Zapišite kompleksno število $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ v polarni obliki ter izračunajte z^{12}. Rezultat zapišite v obliki $x + iy$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$.

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \quad 3$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} \quad 3$$

$$z = 1 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \quad 2$$

$$z^{12} = |z|^{12} \left(\cos(12\varphi) + i \sin(12\varphi)\right) = 1^{12} \left(\cos\left(12 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(12 \cdot \frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$= (\cos(8\pi) + i \sin(8\pi)) = (\cos 0 + i \sin 0) = 1 + i \cdot 0 = \underline{\underline{1}} \quad 7$$

b) **(15 točk)** Poiščite vse rešitve enačbe

$$z - 6 = i(9 - 2\bar{z}).$$

$$z = x + iy \ ; \ x, y \in \mathbb{R}$$

$$x + iy - 6 = i(9 - 2(x - iy)) \quad 2$$

$$x + iy - 6 = i(9 - 2x + 2yi) \quad 2$$

$$x - 6 + yi = 9i - 2xi - 2y \quad 2$$

$$x - 6 = -2y \quad 2$$

$$y = 9 - 2x \quad 2$$

$$x - 6 = -2(9 - 2x)$$

$$x - 6 = -18 + 4x$$

$$-3x = -12$$

$$x = 4 \quad 2 \qquad y = 9 - 2 \cdot 4 = 1 \quad 2$$

$$\boxed{z = 4 + i} \quad 1$$

2. naloga **(40 točk)**

a) **(15 točk)** Izračunajte limito

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 3^{n+1} + 7^{n+1}}{7^{n+2} + 1}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 3^n \cdot 3 + 7^n \cdot 7}{7^n \cdot 7^2 + 1} \quad \begin{matrix} /:7^n \\ /:7^n \end{matrix} = \quad 5$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to 0}{\frac{n^3}{7^n}} + \overset{\to 0}{\left(\frac{3}{7}\right)^n} \cdot 3 + 7}{7^2 + \underset{\to 0}{\frac{1}{7^n}}} = \frac{7}{7^2} = \underline{\underline{\frac{1}{7}}} \quad 5$$

5

b) **(25 točk)** Za katere $x \in \mathbb{R}$ konvergira vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x-3)^n}?$$

Za tiste $x \in \mathbb{R}$, za katere vrsta konvergira, izračunajte njeno vsoto.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x-3)^n} = 1 + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{x-3}} = \frac{1}{\frac{x-3-1}{x-3}} =$$

$a_1 = 1 \quad q = \frac{1}{x-3} \qquad |q| < 1$

10

$$= \underline{\underline{\frac{x-3}{x-4}}}$$

$$\left|\frac{1}{x-3}\right| < 1 \quad 5$$

$\underline{x > 3:}$

$\frac{1}{x-3} < 1 \;/\cdot (x-3) > 0$

$1 < x - 3$

$\underline{x > 4}$

$x \in (4, \infty)$ 5

$\underline{x < 3:}$

$-\frac{1}{x-3} < 1 \;/\cdot(-1)$

$\frac{1}{x-3} > (-1) \;/\cdot (x-3) < 0$

$1 < -x + 3$

$\underline{x < 2}$

$x \in (-\infty, 2)$ 5

Vrsta konvergira za $x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$

3. naloga **(30 točk)** Naj bo funkcija f podana s predpisom $f(x) = \frac{x^2+2x-15}{x+4}$.

a) **(25 točk)** Določite definicijsko območje, ničle in pole funkcije f. Zapišite enačbo asimptote ter določite presečišče grafa f z asimptoto. Skicirajte graf funkcije f. Ali je funkcija f injektivna, surjektivna, soda, liha? Utemeljite!

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$ 1

ničle: $x^2+2x-15=0$ 5

$(x+5)(x-3)=0$

$x_1=-5 \quad x_2=3$

poli: $x+4=0$ 1

$x=-4$

asimptota: $y=x-2$ 6

$(x^2+2x-15):(x+4)=x-2$

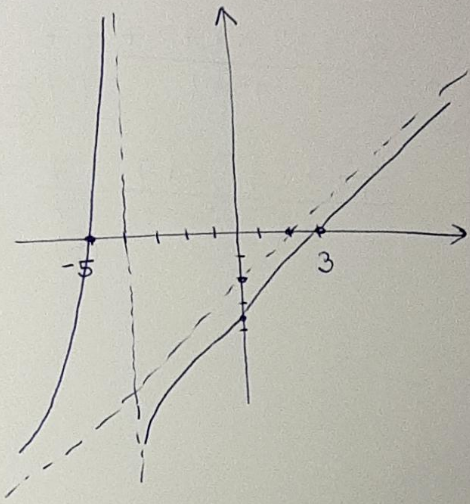
$-x^2 \pm 4x$

$-2x-15$

$+2x+8$

-7 ni presečišč 2

zač. vrednost: $f(0)=-\frac{15}{4}$



ni injektivna 2

je surjektivna 2

ni soda 1

ni liha 1

b) **(5 točk)** Naj bo $g(x) = \log(f(x)) = log(\frac{x^2+2x-15}{x+4})$. Določite definicijsko območje funkcije g.

$D_g: \frac{x^2+2x-15}{x+4} > 0$ 2

slika: $x \in (-5,-4) \cup (3,\infty)$ 3